Razones trigonométricas

7 **Resuelve un triángulo rectángulo, sabiendo que la tangente de uno de sus ángulos agudos es 3,5 y que el cateto opuesto a este ángulo mide 2 cm.**

Dado que el triángulo es rectángulo, un ángulo, A, vale 90°.

$\text{tg } B = 3{,}5$

$B = 74{,}05°$

Entonces, $C = 15{,}95°$.

Como sabes $\text{tg } B = \dfrac{b}{c}$, por lo que:

$$c = \frac{b}{\text{tg } B} \Rightarrow c = \frac{2}{3{,}5} = 0{,}57 \text{ cm}$$

por el teorema de Pitágoras:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = 2{,}08 \text{ cm}$$

8 **¿Es posible que exista un ángulo, α, que verifique simultáneamente $\text{sen } \alpha = \dfrac{3}{5}$ y $\cos \alpha = \dfrac{2}{5}$? ¿Por qué?**

No es posible.

Se ha de cumplir que: $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ para cualquier ángulo.

Si sustituimos por los valores que nos da el enunciado obtenemos:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{13}{25} \neq 1$$

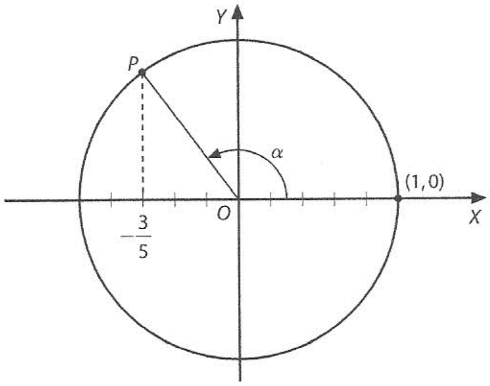
9 **Si $\text{cotg } \alpha = \text{cotg } \beta$, ¿podemos asegurar que α y β son iguales? Razona tu respuesta.**

No puede asegurarse que α y β sean iguales.

Las cotangentes de ángulos que difieren 180° también son iguales.

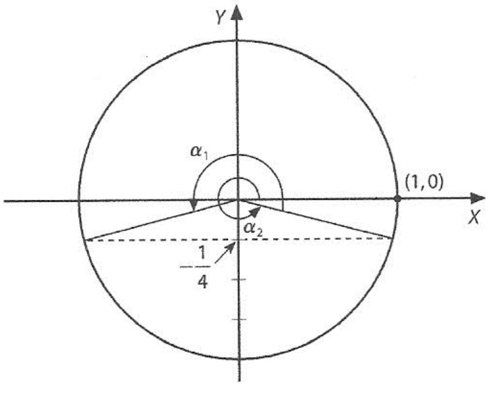
10 **Dibuja un ángulo del segundo cuadrante cuyo coseno vale −3/5, utilizando una circunferencia de radio unidad.**

La representación del ángulo α es la siguiente:

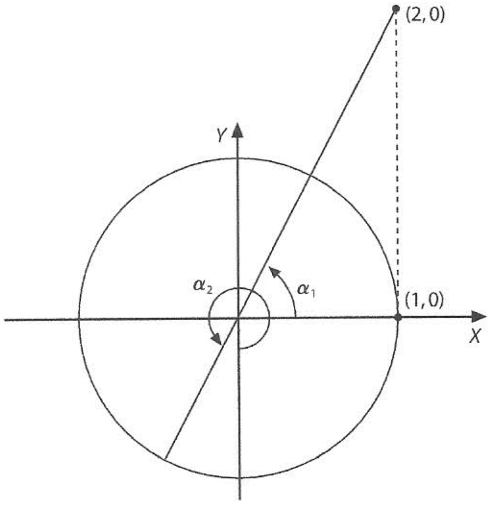


11 **Dibuja los ángulos cuyo seno vale −1/4 utilizando una circunferencia de radio unidad.**

La representación de los ángulos α_1 y α_2 es la siguiente:



12 **Utiliza una circunferencia de radio unidad para dibujar los ángulos cuya tangente es 2.**



13 **Si $\cos \alpha = -1{,}11$, indica cuál de las siguientes afirmaciones es cierta y razona tu respuesta.**

a) **α es un ángulo negativo.**

b) **α está en el tercer cuadrante.**

c) **α es un ángulo mayor que 2π.**

d) **Es imposible que el coseno de un ángulo sea −1,11.**

$|\cos \alpha| \leq 1$ para cualquier ángulo; por tanto, la respuesta correcta es la *d)*.

14 **Señala en qué cuadrante está el ángulo α si:**

a) **$\text{sen } \alpha > 0$ y $\cos \alpha < 0$**

b) **$\text{sen } \alpha < 0$ y $\text{tg } \alpha > 0$**

c) **$\sec \alpha < 0$ y $\text{cosec } \alpha < 0$**

d) **$\text{cotg } \alpha < 0$ y $\cos \alpha > 0$**

a) Seno positivo y coseno negativo: segundo cuadrante.

b) Seno negativo y tangente positiva: tercer cuadrante.

c) Secante y cosecante negativas: tercer cuadrante.

d) Cotangente negativa y coseno positivo: cuarto cuadrante.

15 **Sean α y β dos ángulos cualesquiera teniendo en cuenta que:**

$$\text{tg } \alpha > \text{tg } \beta;\ 270° < \alpha < 360°;\ 270° < \beta < 360°$$

indica si las siguientes afirmaciones son ciertas o no.

a) **$\alpha < \beta$**

b) **$\text{sen } \alpha < \text{sen } \beta$**

c) **$\beta < \alpha$**

d) **$\text{sen } \beta < \text{sen } \alpha$**

Los dos ángulos pertenecen al cuarto cuadrante. Sus tangentes son negativas. Es más negativa la tangente del ángulo menor, por tanto es correcta la afirmación *c)*. Además la afirmación *d)* también es correcta, porque con el seno ocurre lo mismo en el cuarto cuadrante.

16 **Si $\text{tg } \alpha = -4$ y $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcula las demás razones trigonométricas.**

α pertenece al segundo cuadrante. Con el dato del enunciado y la ecuación fundamental de la trigonometría, expresando la tangente en función del seno y coseno de un ángulo, se obtiene:

$\text{sen } \alpha = 0{,}97$ $\quad \cos \alpha = -0{,}24$

$\text{cosec } \alpha = 1{,}03$ $\quad \sec \alpha = -4{,}17$

$\text{cotg } \alpha = -0{,}25$

17 **Si sen $\alpha = -0{,}3$ y $180° < \alpha < 270°$, calcula las otras razones trigonométricas.**

α pertenece al tercer cuadrante.

Con el dato del enunciado y la ecuación fundamental se deduce:

$\cos\alpha = -0{,}95$ $\quad$ $\text{tg}\,\alpha = 0{,}31$

$\text{cosec}\,\alpha = -3{,}33$ $\quad$ $\sec\alpha = -1{,}05$

$\text{cotg}\,\alpha = 3{,}22$

18 **Si $\cos\alpha = 0{,}65$ y $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, calcula las restantes razones trigonométricas.**

α pertenece al cuarto cuadrante.

Con el dato del enunciado y la ecuación fundamental se deducen:

$\text{sen}\,\alpha = -0{,}76$ $\quad$ $\text{tg}\,\alpha = -1{,}17$

$\text{cosec}\,\alpha = -1{,}32$ $\quad$ $\sec\alpha = 1{,}54$

$\text{cotg}\,\alpha = -0{,}86$

19 **De un ángulo α sabemos que:**

$$\text{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2};\ \text{sen}\,\alpha < \cos\alpha$$

¿En qué cuadrante se encuentra dicho ángulo?

En el cuarto cuadrante.

20 **Señala si las siguientes igualdades son ciertas o no. En este último caso, escribe la igualdad correcta.**

a) $\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,(180° + \alpha)$

b) $\cos\alpha = \text{sen}\,(90° + \alpha)$

c) $\sec\alpha = \sec\,(2\pi - \alpha)$

d) $\text{tg}\,\alpha = \text{cotg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

e) $\text{cosec}\,\alpha = -\text{cosec}\,(\pi - \alpha)$

f) $\text{cotg}\,\alpha = \text{cotg}\,(360° - \alpha)$

a) No es cierta: $\text{sen}\,\alpha = -\text{sen}\,(180° + \alpha)$

b) Cierta.

c) Cierta.

d) Cierta.

e) No es cierta: $\text{cosec}\,\alpha = \text{cosec}\,(\pi - \alpha)$

f) No es cierta: $\text{cotg}\,\alpha = -\text{tg}\,(360° - \alpha)$

21 **A partir de las razones de 0°, 30° y 45° calcula.**

a) sen 135°

b) cos 720°

c) cos 210°

d) tg 300°

e) cos 450°

f) tg 135°

g) tg 210°

a) $\text{sen}\,135° = \text{sen}\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 720° = \cos 0° = 1$

c) $\cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\text{tg}\,300° = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$

e) $\cos 450° = \text{sen}\,0° = 0$

f) $\text{tg}\,135° = -1$

g) $\text{tg}\,210° = \text{tg}\,30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

22 **Sin usar la calculadora, halla todos los valores de α en el primer giro que verifican las siguientes igualdades.**

a) $\text{sen}\,\alpha = -1/2$ $\quad$ ***d)*** $\text{tg}\,\alpha = \sqrt{3}$

b) $\sec\alpha = -\sqrt{2}$ $\quad$ ***e)*** $\text{cosec}\,\alpha = -2/\sqrt{3}$

c) $\cos\alpha = 1/\sqrt{2}$ $\quad$ ***f)*** $\text{cosec}\,\alpha = -2$

a) Ángulos cuyo seno es $-1/2$: 210° y 330°

b) Ángulos cuya secante es $-\sqrt{2}$: 135° y 225°

c) Ángulos cuyo coseno es $\frac{1}{\sqrt{2}}$: 45° y 315°

d) Ángulos cuya tangente es $\sqrt{3}$: 60° y 240°

e) Ángulos cuya cosecante es $\frac{-2}{\sqrt{3}}$: 240° y 300°

f) Ángulos cuya cosecante es -2: 210° y 330°

23 **Averigua sin utilizar la calculadora:**

a) sen 1 500° $\quad$ ***d)*** $\cos\left(\frac{37\pi}{6}\right)$

b) $\text{sen}\left(\frac{61\pi}{3}\right)$ $\quad$ ***e)*** tg 2 010°

c) cos 2 745° $\quad$ ***f)*** $\text{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$

a) $\text{sen}\,1\,500° = \text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\text{sen}\left(\frac{61\pi}{3}\right) = \text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos 2\,745° = \cos 225° = -\cos 45° = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

d) $\cos\left(\frac{37\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\text{tg}\,2\,010° = \text{tg}\,210° = \text{tg}\,30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

f) $\text{tg}\left(\frac{-7\pi}{3}\right) = \text{tg}\left(\frac{-\pi}{3}\right) = -\text{tg}\,\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

24 **Sabiendo que $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{4}$ y que α es un ángulo del primer cuadrante, calcula:**

a) $\text{sen}\,(180° - \alpha)$ $\quad$ ***d)*** $\text{sen}\,(180° + \alpha)$ $\quad$ ***g)*** $\text{cosec}\,\alpha$

b) $\text{cosec}\,(-\alpha)$ $\quad$ ***e)*** $\cos\,(360° - \alpha)$ $\quad$ ***h)*** $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

c) $\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ $\quad$ ***f)*** $\sec\,(180° - \alpha)$ $\quad$ ***i)*** $\text{cotg}\,(-\alpha)$

a) $\text{sen}\,(180° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha = 3/4$

b) $\text{cosec}\,(-\alpha) = -\text{cosec}\,\alpha = -4/3$

c) $\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{cotg}\,\alpha = -\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

d) $\text{sen}\,(180° + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha = -3/4$

e) $\cos\,(360° - \alpha) = \cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

f) $\sec\,(180° - \alpha) = \frac{1}{\cos\,(180° - \alpha)} = \frac{1}{-\cos\alpha} = -\frac{4\sqrt{7}}{7}$

g) $\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{4}{3}$

h) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\text{sen}\,\alpha = -\frac{3}{4}$

i) $\text{cotg}\,(-\alpha) = \frac{1}{\text{tg}\,(-\alpha)} = \frac{-1}{\text{tg}\,\alpha} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

25 **Halla estas razones trigonométricas sin calculadora.**

a) sen 150°	***f)*** cos 225°	***k)*** tg (−45°)
b) cosec 120°	***g)*** cotg 240°	***l)*** sec 135°
c) sen 315°	***h)*** sec (−120°)	***m)*** sen 1 395°
d) cosec $\left(\frac{7\pi}{6}\right)$	***i)*** sen $\left(\frac{13\pi}{3}\right)$	***n)*** tg $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
e) tg (−495°)	***j)*** cotg $\left(\frac{13\pi}{2}\right)$	***ñ)*** cosec 720°

a) $\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$

b) $\text{cosec } 120° = \text{cosec } 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

c) $\text{sen } 315° = -\text{sen } 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\text{cosec}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\text{cosec}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2$

e) $\text{tg } (-495°) = \text{tg } (-135°) = \text{tg } 225° = \text{tg } 45° = 1$

f) $\cos 225° = -\cos 45° = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $\text{cotg } 240° = \text{cotg } 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

h) $\sec (-120°) = \sec 240° = -\sec 60° = -2$

i) $\text{sen}\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

j) $\text{cotg}\left(\frac{13\pi}{2}\right) = \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

k) $\text{tg } (-45°) = -\text{tg } 45° = -1$

l) $\sec 135° = -\sec 45° = -\sqrt{2}$

m) $\text{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

n) $\text{sen } 1\,395° = \text{sen } 315° = -\text{sen } 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ñ) cosec 720° = cosec 0° no existe

26 **Calcula las siguientes razones trigonométricas:**

a) $\text{tg } (7\pi - \alpha)$, si $\text{tg } \alpha = 2$

b) $\text{tg}\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$, si $\text{tg } \alpha = \frac{3}{2}$

a) $\text{tg } (7\pi - \alpha) = \text{tg } (\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha = -2$

b) $\text{tg}\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{cotg } \alpha = -\frac{2}{3}$

27 **Calcula los ángulos del primer giro que cumplen:**

a) $\cos \alpha = 0{,}989$ ***b)*** $\text{tg } \alpha = 2{,}5$

Utilizando la calculadora:

a) 8° 30′ 22,13″ y 351° 29′ 37,9″ en el primer giro.

b) 68° 11′ 54,93″ y 248° 11′ 54,93″ en el primer giro.

28 **Utilizando la calculadora, averigua el valor que tiene el ángulo α.**

a) $\text{sen } \alpha = -0{,}15,\ \alpha < 3\pi/2$

b) $\cos \alpha = -0{,}92,\ \alpha > \pi$

c) $\text{tg } \alpha = 2{,}35,\ \alpha > \pi$

d) $\text{cotg } \alpha = 0{,}36,\ \alpha < \pi/2$

a) 188° 37′ 37″ ***c)*** 246° 56′ 55,3″

b) 203° 4′ 26″ ***d)*** 70° 12′ 4″

Expresiones trigonométricas

29 **Simplifica las siguientes expresiones trigonométricas.**

a) $\dfrac{\cos(\pi + \alpha) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\pi - \alpha)}$

b) $\dfrac{\cos^2 \alpha}{1 + \text{sen } \alpha}$

c) $(2 - \text{cosec}^2 \alpha) : \dfrac{\text{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha}$

d) $\dfrac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$

e) $\text{sen}^4 \alpha + \text{sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$

f) $\dfrac{\cos^3 \alpha + \cos \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha}{\text{sen}^3 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \text{sen } \alpha}$

g) $\dfrac{-\text{sen } \alpha - \cos^2 \alpha + 1}{\text{sen } \alpha} \cdot (1 + \text{sen } \alpha)$

a) Sustituyendo en función del ángulo α, se obtiene:

$$\frac{-\cos \alpha - \cos \alpha}{-\cos \alpha - \cos \alpha} = 1$$

b) Expresando el coseno en función del seno:

$$\frac{1 - \text{sen}^2 \alpha}{1 + \text{sen } \alpha} = \frac{(1 + \text{sen } \alpha) \cdot (1 - \text{sen } \alpha)}{1 + \text{sen } \alpha} = 1 - \text{sen } \alpha$$

c) Recordando que la cosecante es la inversa del seno y reduciendo a común denominador el primer paréntesis, y dado que:

$$\text{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha = (\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

tenemos:

$$\frac{2\,\text{sen}^2 \alpha - 1}{\text{sen}^2 \alpha} \cdot \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{2\,\text{sen}^2 \alpha - (\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = 1$$

d) Sustituimos por sus valores y operamos.

$$\frac{(1/\sqrt{2}) + (1/\sqrt{3})}{(\sqrt{3}/2) - 0} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})/\sqrt{6}}{\sqrt{3}/2} = \frac{2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3\sqrt{2}}$$

e) Factorizando la expresión, se obtiene:

$$\text{sen}^2 \alpha\,(\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \text{sen}^2 \alpha$$

f) Factorizamos numerador y denominador, simplificamos y se obtiene:

$$\frac{\cos \alpha\,(\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha)}{\text{sen } \alpha\,(\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} = \text{cotg } \alpha$$

g) Dado que $1 - \cos^2 \alpha = \text{sen}^2 \alpha$, se sustituye, se simplifica y se obtiene:

$$\frac{-\text{sen } \alpha + \text{sen}^2 \alpha}{\text{sen } \alpha} \cdot (1 + \text{sen } \alpha) = (-1 + \text{sen } \alpha)(1 + \text{sen } \alpha) = \text{sen}^2 \alpha - 1 = -\cos^2 \alpha$$