



1. Expresar en radianes el ángulo:

1.  $45^\circ$       2.  $30^\circ$       3.  $210^\circ$       4.  $150^\circ$       5.  $300^\circ$       6.  $330^\circ$       7.  $405^\circ$       8.  $450^\circ$

2. Expresar en grados el ángulo:

1.  $\frac{2\pi}{3}$       2.  $\frac{3\pi}{4}$       3.  $\frac{5\pi}{3}$       4.  $\frac{7\pi}{9}$       5.  $\frac{7\pi}{3}$       6.  $3\pi$       7.  $1\pi$       8.  $3\pi$

3. Hallar el valor numérico:

1.  $\cos 3x + 2\cos x - 5\sin 2x$ , para  $x = \frac{\pi}{2}$       2.  $\sin x - 2\cos \frac{2x}{3} + 3\sin \frac{x}{3}$ , para  $x = \frac{3\pi}{2}$       3.  $\sin x + 3\cos \frac{x}{2} + 4\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , para  $x = 2\pi$

4. Hallar el valor de  $\operatorname{sen} \alpha$  en función del  $\operatorname{cos} \alpha$ .

5. Hallar el valor de  $\operatorname{tg} \alpha$  en función de  $\operatorname{sen} \alpha$ .

6. Calcular  $\operatorname{cos} \alpha$  en función de  $\operatorname{tg} \alpha$ .

7. Comprobar la siguiente igualdad:

- |  |   |   |
|--|---|---|
| 1. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cos} \alpha = \operatorname{sec} \alpha$            | 2. $\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{sec} \alpha = \operatorname{cos} \alpha$  | 3. $\operatorname{sec}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1$   |
| 4. $\operatorname{csc}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1$                                   | 5. $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{sec} \alpha$                                 | 6. $\operatorname{sec}^2 \alpha + \operatorname{csc}^2 \alpha = \operatorname{sec}^2 \alpha \cdot \operatorname{csc}^2 \alpha$  |
| 7. $\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{sen}^2 \alpha$ | 8. $\frac{\operatorname{sec} \alpha - \operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha - \operatorname{sen} \alpha} = \operatorname{tg}^3 \alpha$ | 9. $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$ |

8. Escribir la expresión  $2\operatorname{tg}^2 \alpha - 2\operatorname{sec}^2 \alpha + 5\operatorname{sen}^2 \alpha$  de forma que solo contenga la razón coseno.

9. Hallar, sin calculadora, todas las razones del ángulo  $\alpha$ , siendo:

- |   |  |   |   |
|---|--|---|---|
| 1. $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{2}$ , $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ | 2. $\operatorname{sec} \alpha = -\frac{3}{2}$ , $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ | 3. $\operatorname{cos} \alpha = \frac{4}{5}$ , $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ | 4. $\operatorname{csc} \alpha = \frac{7}{5}$ , $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ |
| 5. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$ , $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$      | 6. $\operatorname{ctg} \alpha = -2$ , $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$         | 7. $\operatorname{cos} \alpha = -\frac{1}{5}$ , $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ | 8. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{3}$ , $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ |

10. Relacionar las razones de los siguientes ángulos:

1. 50 y 40      2. 30 y 120      3. 30 y 150      4. 60 y 240      5. 120 y 240      6. -30 y 30      7.  $\alpha$  y  $90+\alpha$       8.  $\alpha$  y  $270+\alpha$

11. Calcular los ángulos del primer giro que tienen el mismo valor para el seno y el coseno.

12. Hallar, sin calculadora, las razones del ángulo:

1. 120      2. 135      3. 150      4. 225      5. 240      6. 300      7. 315      8. 330      9. 390      10. 405      11. 540      12. 1650

13. Simplificar la expresión:

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$                                   | 2. $\operatorname{cos}(2\pi-\alpha) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) - \operatorname{cos}(\pi+\alpha)$                              |
| 3. $\operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) + \operatorname{tg}(\pi+\alpha)\operatorname{cos}(\pi+\alpha)$ | 4. $\operatorname{sen}(2\pi+\alpha)\operatorname{cos}(2\pi-\alpha) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{cos}(\pi+\alpha)$ |

14. Comprobar la siguiente igualdad:

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\operatorname{cos}(\pi-\alpha)\operatorname{sen}(\pi+\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$ | 2. $\operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{cos}(\pi-\alpha) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{sen}(\pi-\alpha) = 0$ |
|---|--|

15. Aplicando las fórmulas de la suma o diferencia, calcular:



1.  $\text{sen}(180+\alpha)$     2.  $\text{cos}(270+\alpha)$     3.  $\text{tg}(90+\alpha)$     4.  $\text{cos}(\pi-\alpha)$     5.  $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$     6.  $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

16. Hallar, sin calculadora, el valor de:

1.  $\text{sen } 15$     2.  $\text{cos } 15$     3.  $\text{tg } 105$     4.  $\text{sen } 165$

17. Comprobar la igualdad:

1.  $\text{sen}(\alpha+\beta)\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\beta$     2.  $\text{cos}(\alpha+\beta)\text{cos}(\alpha-\beta) = \text{cos}^2\alpha - \text{sen}^2\beta$   
3.  $\text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta + \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{\text{tg}(\alpha+\beta)} = 1$     4.  $\text{tg}(\alpha+\beta)\text{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\text{cos}^2\beta - \text{cos}^2\alpha}{\text{cos}^2\beta - \text{sen}^2\alpha}$

18. Siendo  $\text{sen}\alpha = \frac{1}{3}$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  y  $\text{cos}\beta = -\frac{2}{3}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ , calcular:

1.  $\text{sen}(\alpha+\beta)$     2.  $\text{cos}(\alpha+\beta)$     3.  $\text{tg}(\alpha+\beta)$

19. Siendo  $\text{sen}\alpha = \frac{1}{5}$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , calcular:

1.  $\text{sen } 2\alpha$     2.  $\text{cos } 2\alpha$     3.  $\text{tg } 2\alpha$     4.  $\text{sen}\frac{\alpha}{2}$     5.  $\text{cos}\frac{\alpha}{2}$     6.  $\text{tg } 4\alpha$

20. Siendo  $\text{tg}\alpha = 2$ ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , calcular:

1.  $\text{sen } 2\alpha$     2.  $\text{cos } 2\alpha$     3.  $\text{tg } 2\alpha$     4.  $\text{sen}\frac{\alpha}{2}$     5.  $\text{cos}\frac{\alpha}{2}$     6.  $\text{tg } 4\alpha$

21. Calcular  $\text{sen } 3\alpha$  en función de  $\text{sen}\alpha$ .

22. Calcular  $\text{cos } 4\alpha$  en función de  $\text{cos}\alpha$ .

23. Siendo  $\text{sen}\alpha = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  y  $\text{cos}\beta = \frac{2}{3}$ ,  $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ , calcular:

1.  $\text{sen}(2\alpha - \beta)$     2.  $\text{cos}(\alpha+2\beta)$     3.  $\text{sen } 2(\alpha+\beta)$

24. Comprobar la igualdad:

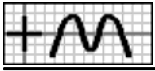
1.  $1 + \text{cos } 2\alpha = 2\text{cos}^2\alpha$     2.  $2 \frac{\text{cos } 2\alpha}{\text{sen } 2\alpha} = \text{ctg}\alpha - \text{tg}\alpha$     3.  $\frac{1 - \text{tg}^2\alpha}{1 + \text{tg}^2\alpha} = \text{cos } 2\alpha$     4.  $\frac{2 \text{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \text{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \text{sen } \alpha$   
5.  $\frac{\text{tg}\alpha}{\text{tg}2\alpha - \text{tg}\alpha} = \text{cos}2\alpha$     6.  $\text{tg}\alpha + \text{ctg}2\alpha = \frac{1}{\text{sen}2\alpha}$     7.  $2\text{cos}^2\alpha - \frac{\text{sen}2\alpha}{\text{tg}2\alpha} = 1$     8.  $\frac{\text{tg}2\alpha + \text{sen}2\alpha}{\text{tg}2\alpha} = 2\text{cos}^2\alpha$

25. Hallar los ángulos del primer giro que cumplen:

1.  $\text{sen}\alpha = \frac{1}{2}$     2.  $\text{cos}\alpha = -\frac{1}{2}$     3.  $\text{tg}\alpha = -\sqrt{3}$     4.  $\text{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$     5.  $\text{cos}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$     6.  $\text{tg}\alpha = 1$

26. Resolver la ecuación:

1.  $\text{sen } x = \text{sen } 22$     2.  $\text{cos } 2x = \text{cos } 32$     3.  $\text{sen } x \cdot \text{cos } x = 1$     4.  $\text{sen } 4x = \text{sen } 2x$     5.  $2\text{cos}^2x = 1$   
6.  $\text{tg } 2x = \text{ctg } x$     7.  $\text{sen } x - \text{cos } x = 0$     8.  $\text{tg } x = \text{sen } x$     9.  $\text{sen } 2x + \text{sen } x = 0$     10.  $\text{sen } x + \text{cos } x = 1$   
11.  $\text{sen } x + \text{cos } 2x = 1$     12.  $\text{sen } 2x + \text{cos } x = 0$     13.  $\text{tg}^2x = \text{sen}^2x$     14.  $\text{cos } 2x + \text{sen}^2x = 1$     15.  $\text{sen}^2x - \text{cos}^2x = 0$   
16.  $\text{cos}^4x - \text{sen}^4x = 1$     17.  $\text{cos } x - \text{sen } x = 1$     18.  $\text{cos } x = \text{sen } x$     19.  $\text{tg } 2x = \text{tg } x$     20.  $2\text{sen } 2x = \text{sen } 4x$



21.  $\cos 2x + \sin x = 1$     22.  $1 - \sin \frac{x}{2} = \cos x$     23.  $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 0$     24.  $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$     25.  $\cos 2x + \sin x = 0$

27. Resolver el sistema (soluciones del primer giro):

1.  $\left. \begin{array}{l} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = 90 \end{array} \right\}$     2.  $\left. \begin{array}{l} \sin x + \cos y = \sqrt{2} \\ x + y = 90 \end{array} \right\}$     3.  $\left\{ \begin{array}{l} \sin x + \cos y = \frac{1}{2} \\ \operatorname{cosec} x + \sec y = -1 \end{array} \right.$     4.  $\left\{ \begin{array}{l} \sin(x-y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x+y) = \frac{1}{2} \end{array} \right.$     5.  $\left\{ \begin{array}{l} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{3}{4} \end{array} \right.$

28. Hallar, con la calculadora, el valor de:

1.  $\sin 32^\circ 10'$     2.  $\cos 75^\circ 12' 13''$     3.  $\operatorname{tg} 82^\circ 9' 10''$     4.  $\sin 105^\circ 12''$     5.  $\cos 172^\circ 7''$     6.  $\operatorname{tg} 122^\circ 12''$   
7.  $\sin 218^\circ 5'$     8.  $\cos 252^\circ 1' 2''$     9.  $\operatorname{tg} 193^\circ 23'$     10.  $\sin 12' 3''$     11.  $\cos 372^\circ 15''$     12.  $\operatorname{tg} 359^\circ 45'$

29. Hallar con calculadora, el ángulo  $\alpha$ , sabiendo que cumple:

1.  $\sin \alpha = 0,7682$  ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$     2.  $\cos \alpha = 0,5762$  ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$     3.  $\operatorname{tg} \alpha = 2,3628$  ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$   
4.  $\sin \alpha = 0,7654$  ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$     5.  $\cos \alpha = -0,3256$  ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$     6.  $\operatorname{tg} \alpha = -36,723$  ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$   
7.  $\sin \alpha = -0,5577$  ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$     8.  $\cos \alpha = -0,7765$  ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$     9.  $\operatorname{tg} \alpha = 0,7632$  ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$   
10.  $\sin \alpha = -0,8827$  ,  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$     11.  $\cos \alpha = 0,7777$  ,  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$     12.  $\operatorname{tg} \alpha = -3,5703$  ,  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

30. Resolver el triángulo rectángulo (hipotenusa=a), conocido:

1.  $a=7$  ,  $b=3$     2.  $b=3$  ,  $c=5$     3.  $a=6$  ,  $C=42^\circ$     4.  $a=6.5$  ,  $B=4^\circ 36'$     5.  $b=5$  ,  $B=56^\circ 13''$     6.  $b=3.7$  ,  $C=22^\circ 15'$

31. En un rombo,  $A=C=140^\circ$  y  $\overline{DB}=40$ . Hallar el perímetro.

32. Calcular los ángulos de un triángulo isósceles, cuyos lados miden  $a=b=5$  y  $c=7$ .

33. Una escalera de 10 m de longitud está apoyada en la pared, formando con el suelo un ángulo de  $65^\circ 10'$ . Calcular la altura máxima que alcanza.

34. Resolver el triángulo definido por:

1.  $a=2$  ,  $b=4$  ,  $c=5$     2.  $a=3$  ,  $b=5$  ,  $C=52^\circ$     3.  $a=4$  ,  $b=5$  ,  $B=40^\circ$     4.  $a=4$  ,  $b=5$  ,  $A=30^\circ$   
5.  $a=10$  ,  $B=62^\circ$  ,  $C=84^\circ$     6.  $a=6$  ,  $A=52^\circ$  ,  $B=33^\circ 15'$

35. Calcular la altura de una torre situada en terreno horizontal, sabiendo que con un aparato de 1.20 m de altura, colocado a 20 m de ella, se ha medido el ángulo que forma con la horizontal la visual dirigida al punto más elevado, obteniéndose  $48^\circ 32'$ .

36. Dos observadores A y B, que distan entre sí 1.750 m, miden al mismo tiempo la altura de un avión situado entre ellos. Los ángulos de elevación son de  $84^\circ$  y  $72^\circ$ . ¿Cuál es la altura a que se halla el avión si en ese momento está situado en el mismo plano vertical para los observadores?

37. Dos individuos observan un globo situado entre ellos y en un mismo plano vertical. La distancia entre los individuos es de 500 m. Los ángulos de elevación del globo desde los observadores son  $36^\circ$  y  $41^\circ$  respectivamente. Hallar la altura del globo y su distancia a cada observador.

38. Se desea saber la altura de un edificio situado en la orilla opuesta de un río. La visual del extremo superior del edificio, desde un cierto punto, forma un ángulo de elevación de  $17^\circ$ . Aproximándose 25 m a la orilla, el ángulo es de  $31^\circ$ . Calcular la altura.

39. Para medir la altura de una nube, se han hecho simultáneamente dos observaciones desde los puntos A y B, distantes entre sí 1 km. La inclinación de la visual desde A es de  $47^\circ 15'$ . Los ángulos que las visuales desde A y B forman con la recta AB son



respectivamente  $38^{\circ}14'$  y  $53^{\circ}20'$ . Hallar la altura de la nube.

**40.** Una escalera de bomberos de 10 m de longitud, se ha fijado en un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de  $45^{\circ}$  y si se apoya sobre la otra fachada forma un ángulo de  $30^{\circ}$ . Hallar la anchura de la calle. ¿Qué altura se alcanza con dicha escalera sobre cada una de las fachadas?

**41.** Para medir la distancia entre dos puntos A y B situados en la orilla opuesta de un río, se mide en esta orilla la distancia entre los puntos C y D, siendo  $CD = 325$  m. Se miden, además, los ángulos:  $\angle ACB=27^{\circ}20'$ ,  $\angle CDA=53^{\circ}$ ,  $\angle ACD=96^{\circ}30'$  y  $\angle CDB=104^{\circ}$ . Calcular la distancia entre A y B.

— Soluciones —

- 1.1.  $\frac{\pi}{4}$  1.2.  $\frac{\pi}{6}$  1.3.  $\frac{7\pi}{6}$  1.4.  $\frac{5\pi}{6}$  1.5.  $\frac{5\pi}{3}$  1.6.  $\frac{11\pi}{6}$  1.7.  $\frac{9\pi}{4}$  1.8.  $\frac{5\pi}{2}$  2.1.  $120^{\circ}$  2.2.  $435^{\circ}$  2.3.  $300^{\circ}$  2.4.  $140^{\circ}$  2.5.  $420^{\circ}$  2.6.  $540^{\circ}$  2.7.  $57^{\circ}17'45''$
- 2.8.  $171^{\circ}53'14''$  3.1. 0 3.2. 4 3.3. -3 4.  $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$  5.  $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}$  6.  $\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$  8.  $3-5\cos^2\alpha$  9.1.  $\cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ ,  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$  9.2.  $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\sqrt{5}}{2}$
- 9.3.  $\operatorname{sen}\alpha = \frac{-3}{5}$ ,  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-3}{4}$  9.4.  $\cos\alpha = \frac{-2\sqrt{6}}{7}$ ,  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-5\sqrt{6}}{12}$  9.5.  $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ ,  $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$  9.6.  $\operatorname{sen}\alpha = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$ ,  $\cos\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{5}$  9.7.  $\operatorname{sen}\alpha = \frac{-2\sqrt{6}}{5}$ ,  $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{6}$
- 9.8.  $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5\sqrt{34}}{34}$ ,  $\cos\alpha = \frac{-3\sqrt{34}}{34}$  10.1.  $\operatorname{sen} 50 = \cos 40$ ;  $\cos 50 = \operatorname{sen} 40$ ;  $\operatorname{tg} 50 = \operatorname{ctg} 40$  10.2.  $\operatorname{sen} 120 = \cos 30$ ;  $\cos 120 = -\operatorname{sen} 30$ ;  $\operatorname{tg} 120 = -\operatorname{ctg} 30$
- 10.3.  $\operatorname{sen} 150 = \operatorname{sen} 30$ ;  $\cos 150 = -\cos 30$ ;  $\operatorname{tg} 150 = -\operatorname{tg} 30$  10.4.  $\operatorname{sen} 240 = -\operatorname{sen} 60$ ;  $\cos 240 = -\cos 60$ ;  $\operatorname{tg} 240 = \operatorname{tg} 60$  10.5.  $\operatorname{sen} 240 = -\operatorname{sen} 120$ ;  $\cos 240 = \cos 120$ ;  $\operatorname{tg} 240 = -\operatorname{tg} 120$  10.6.  $\operatorname{sen}(-30) = -\operatorname{sen} 30$ ;  $\cos(-30) = \cos 30$ ;  $\operatorname{tg}(-30) = -\operatorname{tg} 30$  10.7.  $\operatorname{sen}(90+\alpha) = \cos\alpha$ ;  $\cos(90+\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ ;  $\operatorname{tg}(90+\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$
- 10.8.  $\operatorname{sen}(270+\alpha) = -\cos\alpha$ ;  $\cos(270+\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$ ;  $\operatorname{tg}(270+\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$  11.  $45^{\circ}$  y  $225^{\circ}$  12.1.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $-\frac{1}{2}$ ;  $-\sqrt{3}$  12.2.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; -1 12.3.  $\frac{1}{2}$ ;  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- 12.4.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; 1 12.5.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $-\frac{1}{2}$ ;  $\sqrt{3}$  12.6.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $\frac{1}{2}$ ;  $-\sqrt{3}$  12.7.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; -1 12.8.  $-\frac{1}{2}$ ;  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  12.9.  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  12.10.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; 1 12.11. 0; -1; 0 12.12.  $-\frac{1}{2}$ ;  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  13.1.  $-\cos\alpha$  13.2.  $3\cos\alpha$  13.3.  $\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha$  13.4.  $\cos\alpha(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)$  15.1.  $-\operatorname{sen}\alpha$  15.2.  $\operatorname{sen}\alpha$  15.3.  $-\operatorname{ctg}\alpha$  15.4.  $-\cos\alpha$  15.5.  $\cos\alpha$  15.6.  $\operatorname{ctg}\alpha$  16.1.  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$  16.2.  $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$  16.3.  $-2\sqrt{3}$  16.4.  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$  18.1.  $\frac{2(\sqrt{10}-1)}{9}$  18.2.  $-\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$  18.3.  $\frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{3}$  19.1.  $\frac{4\sqrt{6}}{25}$  19.2.  $\frac{23}{25}$  19.3.  $\frac{4\sqrt{6}}{23}$  19.4.  $\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{10}}$  19.5.  $\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{10}}$  19.6.  $\frac{184\sqrt{6}}{433}$  20.1.  $\frac{4}{5}$  20.2.  $-\frac{3}{5}$  20.3.  $-\frac{4}{3}$  20.4.  $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$  20.5.  $-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$  20.6.  $\frac{24}{7}$  21.  $3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha$  22.  $8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$  23.1.  $\frac{7\sqrt{5}-8\sqrt{2}}{27}$  23.2.  $\frac{2(\sqrt{2}+2\sqrt{5})}{27}$  23.3.  $\frac{4(\sqrt{2}-7\sqrt{5})}{81}$  25.1. 30 y 150 25.2. 120 y 240 25.3. 120 y 300 25.4. 240 y 300 25.5. 45 y 315 25.6. 45 y 225 26.1. 22+360k; 158+360k 26.2. 16+180k; 328+180k 26.3. No 26.4. 90k; 30+180k; 150+180k 26.5. 45+90k 26.6. 30+180k; 150+180k 26.7. 90+180k 26.8. 180k 26.9. 180k; 120+360k; 240+360k 26.10. 360k; 90+360k 26.11. 180k; 30+360k; 150+360k 26.12. 90+180k; 210+360k; 330+360k 26.13. 180k 26.14. 180k 26.15. 45+90k 26.16. 180k 26.17. 360k; 270+360k 26.18. 45+360k 26.19. 180k 26.20. 90k 26.21. 180k; 30+360k; 150+360k 26.22. 360k; 60+360k; 300+360k 26.23. 60+180k 26.24. 45+360k 26.25. 90+120k 27.1. (30,60) 27.2. (45,45) 27.3. (90,120); (90,240); (210,0); (330,0) 27.4. (45,15); (165,135); (105,315); (225,75) 27.5. (30,30); (150,150) 28.1. 0.5324 28.2. 0.5417 28.3. 7.2557 28.4. 0.9659 28.5. -0.9903 28.6. -1.6001 28.7. -0.6168 28.8. -0.3087 28.9. 0.2379 28.10. 0.0035 28.11. 0.8387 28.12. -0.0044 29.1.  $50^{\circ}11'33''$  29.2.  $54^{\circ}48'59''$  29.3.  $67^{\circ}3'38''$  29.4.  $130^{\circ}3'27''$  29.5.  $109^{\circ}7''$  29.6.  $91^{\circ}33'35''$  29.7.  $213^{\circ}53'49''$  29.8.  $219^{\circ}3'32''$  29.9.  $217^{\circ}21'3''$  29.10.  $298^{\circ}1'49''$  29.11.  $321^{\circ}3'2''$  29.12.  $285^{\circ}38'49''$  30.1.  $c=6.3245$ ;  $B=25^{\circ}22'37''$ ;  $C=64^{\circ}37'23''$  30.2.  $a=5.8309$ ,  $B=30^{\circ}57'48''$ ,  $C=59^{\circ}2'12''$  30.3.  $B=48^{\circ}$ ,  $b=4.4588$ ,  $c=4.0147$  30.4.  $C=85^{\circ}24'$ ,  $b=0.5213$ ,  $c=6.479$  30.5.  $C=33^{\circ}59'47''$ ,  $a=6.03080$ ,  $c=3.3721$  30.6.  $B=67^{\circ}45'$ ,  $a=3.9977$ ,  $c=1.513$  31. 85.1342 32.  $A=B=45^{\circ}34'23''$ ,  $C=88^{\circ}51'14''$  33. 9.0753 34.1.  $A=22^{\circ}19'53''$ ,  $B=49^{\circ}27'31''$ ,  $C=108^{\circ}12'36''$  34.2.  $c=3.94$ ,  $A=36^{\circ}51'40''$ ,  $B=91^{\circ}8'20''$  34.3.  $a=7.3524$ ,  $A=109^{\circ}3'15''$ ,  $C=30^{\circ}56'45''$  34.4.  $c_1=7.4525$ ,  $B_1=38^{\circ}40'45''$ ,  $C_1=111^{\circ}19'5''$ ;  $c_2=1.2076$ ,  $B_2=141^{\circ}19'5''$ ,  $C_2=8^{\circ}40'55''$  34.5.  $A=34^{\circ}$ ,  $b=15.7898$ ,  $c=17.785$  34.6.  $C=94^{\circ}45'$ ,  $b=4.1747$ ,  $c=7.5879$  35. 23.8324 36. 4069.54 38. 15.56 39. 589.2 40. 15.73; 7.07; 5 41. 2208.6